# 名古屋港と三河港の相関性を考慮した確率潮位の算定法

土木設計室　平　宜起

## 1. はじめに

あらゆる土木構造物は自然の外力にさらされており，それらの統計的性質を正確に把握することが土木技術者に求められている．わが国の沿岸防災計画の策定には，高潮偏差の合理的設定が不可欠であり，高潮偏差に係わる信頼度の高い推定値を得ることが必要である．

従来の極値統計解析は，ある一地点における自然外力を評価する，一変量での極値解析であった．しかし，範囲が広範囲に及ぶ台風時，地震時などは複数の地点の構造物群の被害の評価や，ある領域の被害想定を行う必要があり，個々の地点での危険度のみならず，それぞれの地点間の相関を適切に考慮することが必要である．Goda(2000)による解析法では，形状母数の等しい地点を同一の領域と見なして解析を進めている．近隣の複数地点の波浪データを用いて，母分布の特性の違いについて相互比較を検討する際，推定された母分布が，一方は極値分布で，他方が Weibull 分布であるといった場合には，単純に位置母数や尺度母数の比較を行なうことはできない．

そこで，本研究ではサンプルデータと名古屋港，三河港の年最大潮位偏差のデータを用い，二地点での相関を考慮した，二変量極値モデルの検討を行う．検討に当たっては北野ら(2008)によって提案された経験度の算出を行い，一変量の極値分布で算出された経験度との比較を行う．また，従来の一変量の極値解析に比べて，二変量になることで考慮するべき母数は増える．そのため，解析に実用する際にもその複雑さがついて回る．地点毎の母数値が近く，等しいと見なせる場合は，母数の共通化を行う．

## 2. 二変量極値分布を用いるにあたって

ある地点の極値データを X，もう一方のデータを Y として，それぞれが同じ一次元の極値分布に従うと仮定する．

このとき，X と Y の従属性を考慮するためには，X と Y のペア（X，Y）の従属関数を考える必要がある．そうすることで同様な二次元の極値分布に従うこととなる．二変量では超過値の分布が特定の分布に収束することは保障されていない．したがって，極値の条件を満たす従属関数は無数に存在し，その中から適当な従属関数を選択する必要がある．本研究では，従属関数のパラメトリックモデルの中で最も単純な構造を有した，Logistic モデル(Gumbel,1960)を用いて解析を行う．以下に Logistic モデルを示す．

$$H(u_1,u_2)=\exp\left\{-(u_1^{-1/\alpha}+u_2^{-1/\alpha})^{\alpha}\right\} \tag{1}$$

$\alpha$ は従属のパラメータを示す．また，$\alpha=1$ の場合はケンドールの順位相関係数 $\tau=1-\alpha$ の関係から，独立であるケース，$\alpha\to 0+$ のときに完全に依存しているケースを示し，単一のパラメータ $\alpha$ で依存関係を表すことができる．地点毎の生起率 $\lambda_i$ は $u_i=\lambda_i$ と考えることができ，これを式（1）に代入することで，二変量の極値分布が導入できる．

これらを用いて他方のデータを考慮することで，数少ない極値の観測記録を有効に取り扱うことができるのか，経験度を用いて検討する．本研究で用いる経験度は地点毎の経験度を算出しているため，一変量での算出方法と同様である．経験度を以下の式(2)で示す．

$$\frac{1}{K}=\frac{\nabla'\lambda V(\theta)\nabla\lambda}{\lambda^2} \tag{2}$$

ここで，$V(\theta)$ を分散・共分散行列，$\lambda$ を生起率とし，$V(\theta)$ は，観測情報行列 $I(\theta)$ の逆行列で与えられる．

また，$\nabla'$ は以下の式で表され，$\nabla$ は $\nabla'$ の転置行列である．

$$\nabla'=\left(\frac{\partial}{\partial\mu},\frac{\partial}{\partial\sigma},\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \tag{3}$$

この経験度が 2 以上であれば，2 度あることは 3 度あるあるかもしれないと考え，検討の対象とする．経験度が 2 未満のときは，情報不足として，極値解析の推定結果を保留すべきだと考える．

## 3. データへの二変量極値分布の適用

### (1) サンプルデータを用いた二変量解析

最初にサンプルデータを例に，二変量極値解析の手順の確認を行いながら解析を進める．ここで扱うデータは，お互いが近い場所に位置する二地点で観測された，年最大風速データを基に作成されている．それぞれの地点を V1，V2 として，それぞれ 200 個

のデータを用いて解析を行なう．

二変量極値分布の母数値を推定するにあたっては，大きく分けて sequential 法と joint 法の 2 通りの方法がある．（castillo,2004）

Sequential 法は，以下の手順で推定を行なう．
①図式推定法または最尤法から，それぞれの標本の母数推定，②標本をフレシェ変換，③Logistic 分布に適合，④従属パラメータを推定

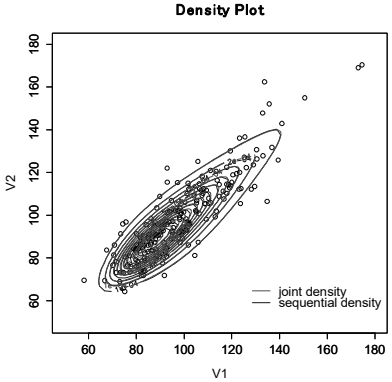
①の図式推定は確率紙を用い，ある分布が紙上で直線として表されるように考案されている．極値データは，選択された分布の確率紙上にプロットされる．そして，視覚的な判断によりデータに最も良くあてはまる直線が描かれ，それぞれに対する母数の推定を行なう．また，最尤法を地点毎に行い一変量として母数の推定を行う．

②では事象となる極値イベント時の観測値を標準 Frechet 分布に従う確率変数の実現値に変換を行う．①で推定された値を用いて，観測値 $V_1$，$V_2$ は以下の式(4)から $U_1$，$U_2$ に変換を行う．ここで，式(4)はデータが Gumbel 分布に従う場合を考えている．

$$\exp\left\{-\exp\left(\frac{\mu_i - V_i}{\sigma_i}\right)\right\} = \exp\left(-\frac{1}{U_i}\right), i = 1,2 \qquad (4)$$

②で求めた結果を用いて，③，④では式(1)に適合し，この式に対して(a)重み付き最小二乗法，(b)最尤法，などを用いて従属パラメータ $\alpha$ の推定を行う．

Joint 法は従属パラメータを含めた，二変量極値分布の全ての母数を最尤法を用いて推定するものである．一変量で解析を進める場合には Sequential 法を使用することに一致する．推定結果などの確認を行いながら，順を追って解析を進めて行くことができる．両者により推定された母数値を用いて**図－1**に密度関数のコンター図を示す．




**図－1**　密度関数のコンター

**図－1** からも一変量，二変量で母数にほとんど変化がないことがわかる．しかし，これらの母数を用いて分散・共分散行列の算出を行うと違いが生じ，そのことにより経験度に差がでる．

二変量の極値分布を用いるにあたって母数の数が増えるが，地点間での母数を考慮することでさらに増加する．そこで，母数値が近い値を示すのであれば，二変量極値分布のそれぞれの母数を共通とみなして母数の共通化を行う．上記の推定結果から，サンプルデータの V1，V2 の母数は共に近い値をとることから，以下の 4 つの条件で経験度の比較を行った．①$\mu$ , $\sigma$ 共通化，②$\mu$ 共通化，③$\sigma$ 共通化，④共通化なし．

ここで，母数の共通化を行う上での地点毎の分散共分散行列の算出方法を記す．ここでは具体的に③$\sigma$ を共通化したときを例に挙げる．この時 Gumbel 分布に従う二変量極値分布は式(5)のように表すことができる．

$$H(x_1, x_2) = \exp\left(-\left[\exp\left(\frac{\mu_1 - x_1}{\sigma\alpha}\right) + \exp\left(\frac{\mu_2 - x_2}{\sigma\alpha}\right)\right]^{\alpha}\right) \qquad (5)$$

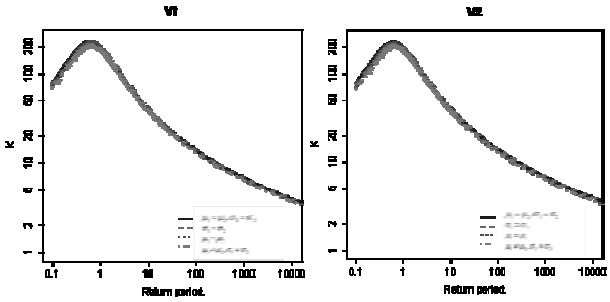
また，共通化により，式(5)の母数は 4 つであるため，この分布から算出されるヘッシアン行列は四行四列となる．しかし，本研究では地点毎の分散・共分散行列から地点毎の経験度の算出を行うため，$\sigma$ の項を一つ増やし五行五列として算出する．

ここで，ヘッシアン行列は多変数スカラー値関数の二階微分した正方行列であり，関数 f に対数尤度関数をあてはめることで，情報行列 I( $\theta$ )に一致する．このことから，ヘッシアン行列の逆行列を求めることで，以下の式(6)に示すような，分散・共分散行列を算出することができる．

$$H^{-1}(\theta_1,\theta_2,\alpha) = V(\theta_1,\theta_2,\alpha) = \begin{bmatrix} V(\mu_1) & \mathrm{cov}(\mu_1,\sigma) & \mathrm{cov}(\mu_1,\mu_2) & \mathrm{cov}(\mu_1,\sigma) & \mathrm{cov}(\mu_1,\alpha) \\ \mathrm{cov}(\sigma,\mu_1) & V(\sigma) & \mathrm{cov}(\sigma,\mu_2) & V(\sigma) & \mathrm{cov}(\sigma,\alpha) \\ \mathrm{cov}(\mu_2,\mu_1) & \mathrm{cov}(\mu_2,\sigma) & V(\mu_2) & \mathrm{cov}(\mu_2,\sigma) & \mathrm{cov}(\mu_2,\alpha) \\ \mathrm{cov}(\sigma,\mu_1) & V(\sigma) & \mathrm{cov}(\sigma,\mu_2) & V(\sigma) & \mathrm{cov}(\sigma,\alpha) \\ \mathrm{cov}(\alpha,\mu_1) & \mathrm{cov}(\alpha,\sigma) & \mathrm{cov}(\alpha,\mu_2) & \mathrm{cov}(\alpha,\sigma) & V(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

この地点毎に算出された，分散・共分散行列を式(2)にあてはめることで地点毎の経験度を求める．

同様な方法で，サンプルデータに対して先に示した 4 つの条件での母数の共通化を行った．以下の**図－2** に V1, V2 の共通化による経験度の推移を示す．



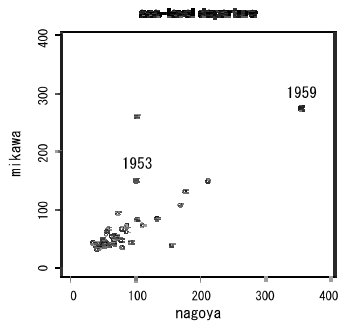

**図－2**　サンプルデータを用いた母数の共通化

**図－2** からは，$\mu$，$\sigma$ を共通化した時が他のモデルと比較して経験度が高くなっている．共通化しない時と比べて，経験度は V1 で最大 27.15，V2 で 30.64 の増加が見られた．

しかし，実際は母数を強引に共通とみなして解析を進めているモデルも考えられる．そのため，客観的なモデル選択として，AIC（赤池情報量基準）を用い，共通化して問題ないのかどうか検討が必要となる．

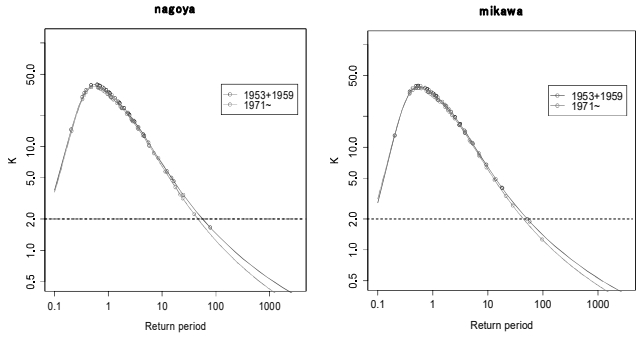
### (2) 名古屋港，三河港の潮位偏差値を用いた検討

解析に用いるデータは，愛知県にある名古屋港と三河港で観測された，年最大潮位偏差のデータを用いて解析を行なう．データはお互いが対応するよう，1971-2010 年の 40 年間の連続データと 1953 年，1959 年を加えた 42 個を用いる．名古屋港，三河港のデータをプロットすると**図－3** のようになる．




**図－3**　名古屋港，三河港の潮位偏差

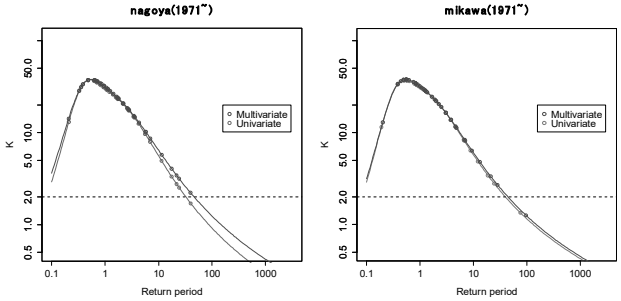
その内，1959 年は愛知県を始め全国的にも大きな被害をもたらした伊勢湾台風である．一般的に，過去に起きた大きな事象を考慮することにより，経験度は上がると考えるのが自然である．**図－4** に 1971 年から 2010 年までの連続したデータと，1953 年，1959 年を加えたデータでの経験度の比較を示す．




**図－4**　連続データと 1953 年，1959 年を加えた時の経験度の推移

**図－4** から，1971 - 2010 年の連続データと，1953 年，1959 年を加えた時のデータでは経験度に大きな変化は見られない．これは，データを扱う上で，1953 年，1959 年を 1971 - 2010 年の連続データに年最大値データとして付け加えた形になっているためだと考えられる．解析に用いるにあたっては適切な処理を与えた上で，連続データに加味する必要がある．このことから，以下では 1971 年から 2010 年までの連続したデータを用いる．

1971 年から 2010 年までのデータを用いて，一変量と二変量で経験度の比較を行ったものを**図－5** に示す．




**図－5**　一変量と二変量での経験度の推移

**図－5** から，名古屋港と三河港共に他方のデータを考慮することで，多少の変化が見てとれる．発生頻度の高い区間で経験度の差が最大となり，名古屋港では 1.15 程度の増加が見られた．しかし，三河港では極端な変化は見ることができなかった．また，今回解析を行なったデータは地点毎の母数値が近い値を取らなかったため，母数の共通化は行っていない．

## 4. まとめ

一変量の解析と比べて，名古屋港では三河港を考慮することで微小な変化ながらも，経験度 2 を上回る結果を得た．この結果からも，相関を考慮することで，限られたデータを有効に扱うことが出来たといえる．しかし，三河港のようにデータによっては，経験度にあまり変化が見られなかった．

今回定義した経験度の算出法はデータが Gumbel 分布に従い，$\mu,\sigma$ が近い値をとることで共通と見なせて算出できた．今後は，$\mu,\sigma$ 一方が共通化できたとき，GEV の時など，地点を併合した領域全体での分散共分散行列の算出方法を検討して行く必要がある．