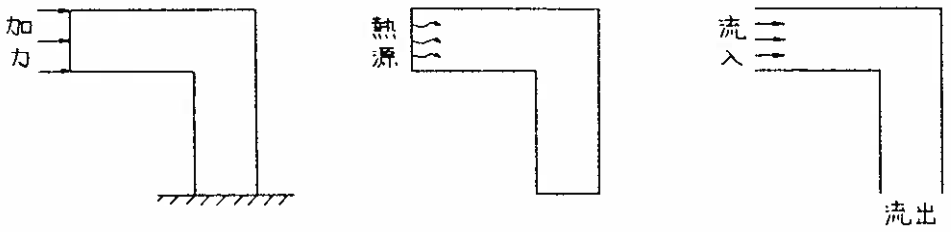
力学挙動の可視化(1)

森脇 昭治

1. はじめに

工学分野で計算機がよく用いられ、複雑な問題も簡単に解けるようになりました。その背景には有限要素法の確立があったといえます。土木分野においても構造解析などに広く応用されています。有限要素法は、無限自由度をもつ連続体を有限個の自由度の問題に変換するモデル化法で、その具体的計算にマトリックス代数を利用すると便利であることから、マトリックス法ともいいます。



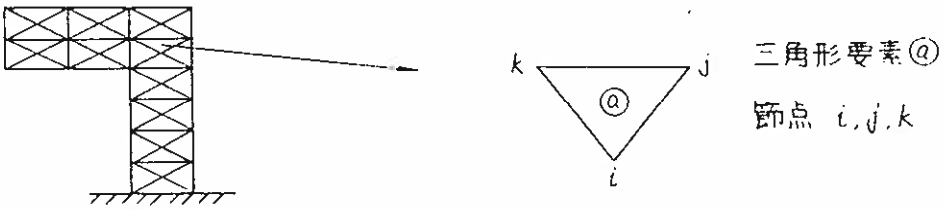
図－1. 有限要素法が対象とする問題例

図－1は、それぞれ問題(物理量や支配方程式)は違いますが、次の点が共通しています。

(1) 全体形状が同じである。

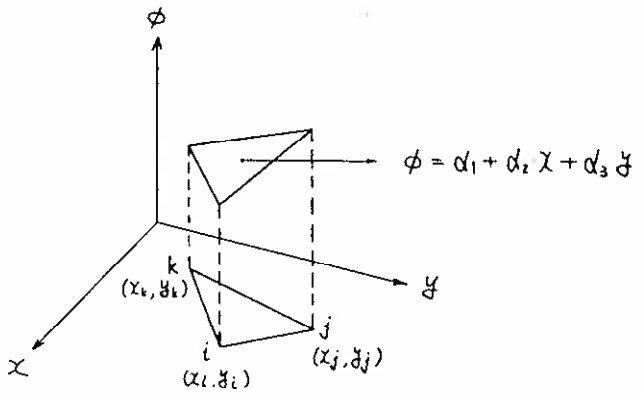
(2) 境界内では物理量が連続的で、支配微分方程式により条件づけられる。

(3) 境界上では、境界条件が存在する。



図－2. 有限要素分割

そこで、内部を図－2のようなメッシュに分けその交点を未知物理量の代表とし、一般未知物理量とします。そして、そのメッシュで分割された要素を有限要素といいます。この要素内の物理量分布は、問題に応じた適当な関数で図－3のように表すことにします。こうすることにより全体が連続的に評価されることになります。



図－3．関数表示

このようにして、全要素について条件式と境界条件式を作れば、メッシュ節点の2種の物理量（例えば変位と外力，温度と発熱量など）に関する連立方程式が得られます。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

これを解けばよいことになります。

いま、メッシュ分割を三角形としましたが構造力学問題では、線材要素，面要素，三次元要素，その他の要素が用いられています。

2．平面ラーメン

ここで、マトリックス法の概念に基づき、実際に応力解析プログラムを作ります。最初は、解析部分をマスターすることを主目的として、簡単な平面ラーメンから始めます。

(1) プログラム概要

このプログラムでは、任意形状ラーメンをフルマトリックス表示し、連立方程式の解法もフルマトリックスの直接解法(コレスキー分解,下三角行列)を用いました。

1)要素分解

構造物を図-4のように部材番号と節点番号をつけて要素に分解します。

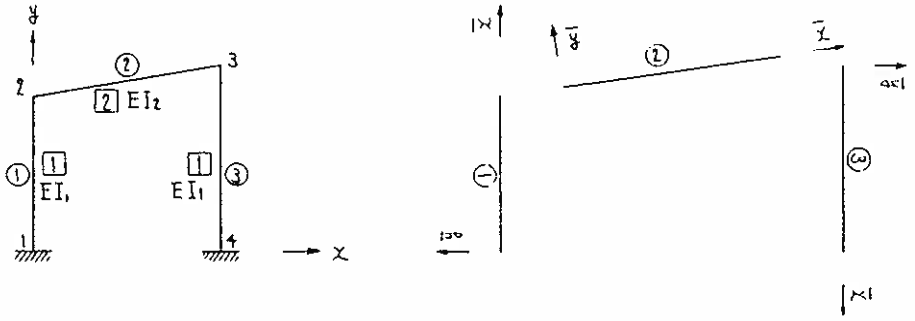


図-4. マトリックス法要素分解

手　順

1. 節点番号を1から順番に付ける。
2. 要素番号を　　〃
3. 要素の断面特性が同じものを1グループとし標準部材特性番号を付ける。

ここでは、番号をどこから付け、どういう順に付けるかは自由です。しかし、この付け方により効率が良くなったり悪くなったりします。また、x,yは全体座標系であり、ξ,ηはその要素の部材座標系です。

2)剛性マトリックス

次の項目を各要素について要素順に要素数分繰り返します。小( )内はプログラム上の配列名です。

1. 要素剛性マトリックス$[K^e]_{(EK)}$の作成
2. 座標変換マトリックス$[T]_{(T)}$の作成
3. 応力マトリックス$([K^e]\times[T])_{(TRK)}$の作成
4. 全体座標系要素剛性マトリックス$([T]^T\times[K^e]\times[T])_{(GK)}$の作成
5. 各要素剛性マトリックスを対応する成分ごとに和をとり、全体剛性マトリックス$[K]_{(GK)}$を作成する

それぞれのマトリックスの内容については省略します。

3)境界条件

変位の拘束に対応する行.列と荷重項を0とし対角項のみに1として解く方法を採用しました。

4) 連立方程式の解法

下三角行列を用いたコレスキー法によって解きました。

5) 応　力

応力についても、次の計算を各要素について要素順に要素数分繰り返します。小( )内はプログラム上の配列名です。

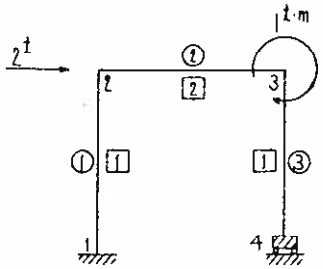
1. 要素剛性マトリックス $[K^e]_{(EK)}$ の作成
2. 座標変換マトリックス $[T]_{(T)}$ の作成
3. 応力マトリックス $([K^e]\times[T])_{(TRK)}$ の作成
4. 応力の計算 $([K^e]\times[T]\times\{\delta\})$, $\{\delta\}$ は部材両端の全体座標表示の節点変位ベクトル

(2) 入力データの作り方と入力順序

解析に先だち図-4のようなモデル化を行い次の順序で入力します。

1. 要素数等
   - 節点数，要素数，荷重数，境界条件数，断面特性数を入力します。
2. 節点座標
   - 節点番号と座標 x, y を節点番号順に1から入力します。
   - 1～節点数〔節点番号，x座標，y座標〕
3. 標準部材特性
   - 特性番号，断面積，断面二次モーメントを特性番号順に1から入力し，後にヤング係数を入力します。
   - 1～特性数〔特性番号，断面積，断面二次モーメント〕
     〔ヤング係数〕(全部材共通のとき)
4. 要素特性
   - 要素番号と要素第1節点，第2節点，部材特性番号を入力します。
   - 1～要素数〔要素番号，第1節点，第2節点，部材特性番号〕
5. 外　力
   - 外力作用節点番号とX方向力，Y方向力，モーメントを入力します。
   - 1～荷重数〔節点番号，X方向力，Y方向力，モーメント〕
6. 境界条件
   - 拘束節点番号とX方向，Y方向，回転(拘束＝1，自由＝0)を入力します。
   - 1～境界条件数〔節点番号，X方向，Y方向，回転θ〕

【例】



	節点	X方向	Y方向	回転
外力	2	2	0	0
	3	0	0	-1
境界	1	1	1	1
	4	0	1	1

変位と力の符号

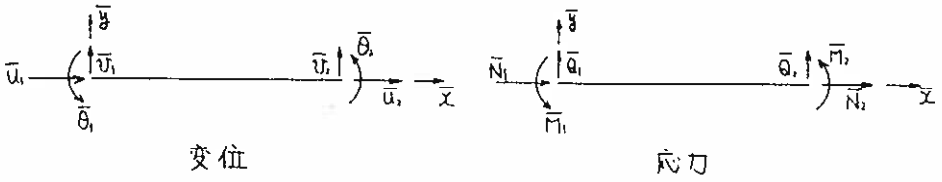


図-5. データの作り方

(3) フローチャート

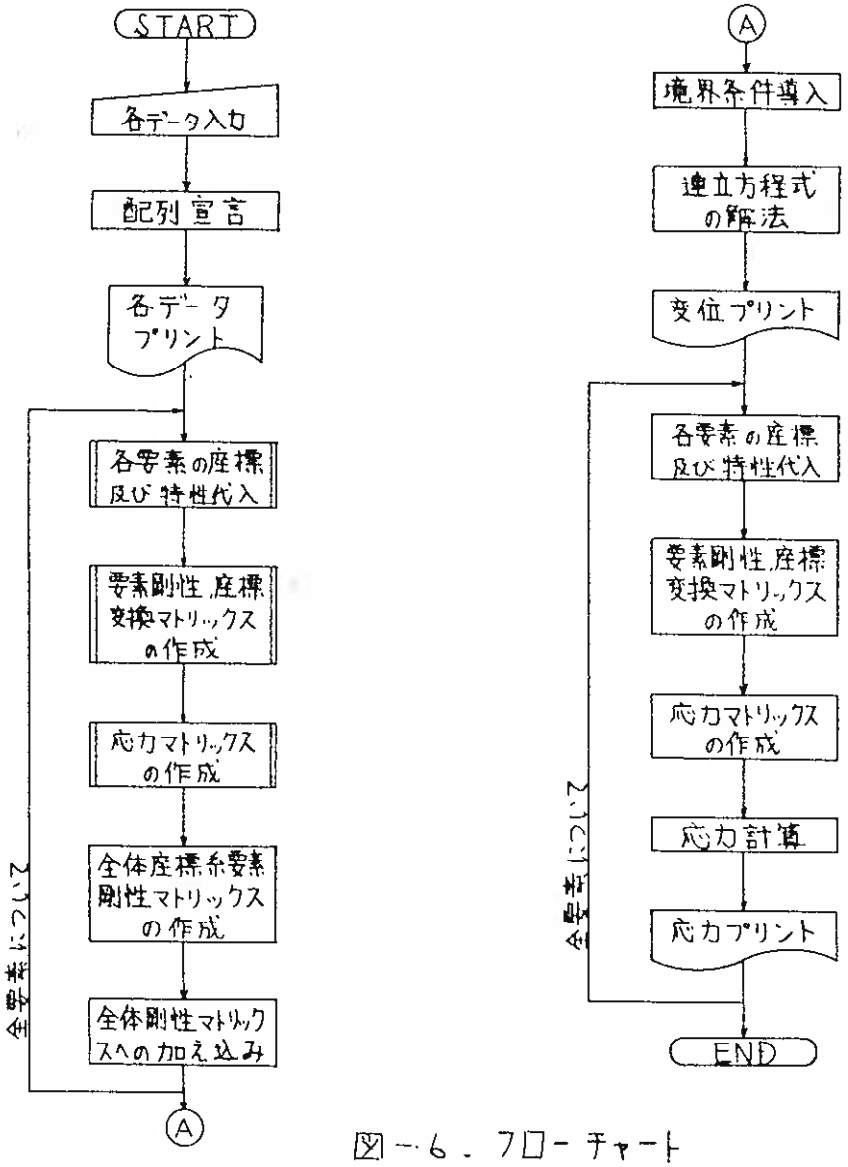
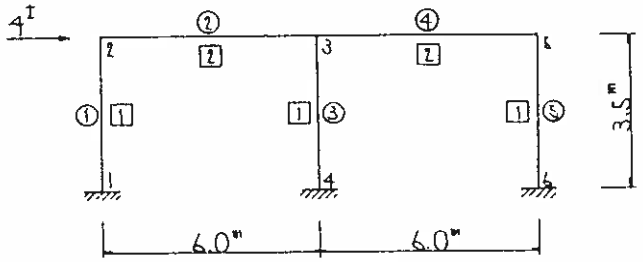


図-6. フローチャート

(4) 例　題



部材特性

1 A = 100 cm²
I = 833 cm⁴
2 A = 197 cm²
I = 1707 cm⁴

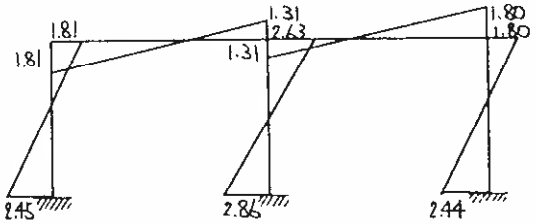
ヤング係数

E = 2.1 × 10³ t/cm²

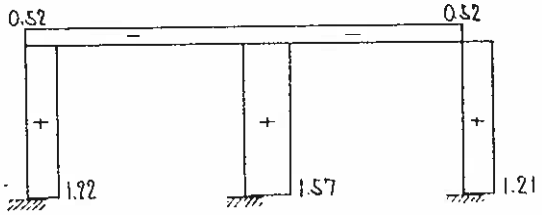
図-7　計算条件

ｾｯﾃﾝ No.	Xﾁｶｲ(cm)	Yﾁｶｲ(cm)	THEAT(ﾗｼﾞｱﾝ)
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	3.61089E+00	8.68078E-04	-6.42524E-03
3	3.60463E+00	-1.74690E-06	-2.29550E-03
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	3.60189E+00	-8.66332E-04	-6.40768E-03
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

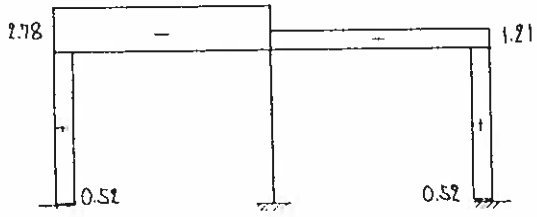
ﾊﾞﾈ No.	ﾀﾞｲ1ｾｯﾃﾝ	ﾀﾞｲ2ｾｯﾃﾝ	N(t)	M1(tm)	M2(tm)	Q(t)
1	1	2	5.20847E-01	2.45154E+00	1.80927E+00	1.21738E+00
2	2	3	-2.78247E+00	-1.80927E+00	-1.31581E+00	-5.20847E-01
3	3	4	-1.04814E-03	2.62953E+00	2.85899E+00	1.56815E+00
4	3	5	-1.21448E+00	-1.31372E+00	-1.80508E+00	-5.19799E-01
5	5	6	-5.19799E-01	1.80508E+00	2.44559E+00	1.21448E+00



M図 (t·m)



Q図 (t)



N図 (t)

図-8　計算結果

3. 可視化

力学の可視化によるものとしてCAI(Computer Assisted Instruction)システムなどがあり、入力や出力にカラーグラフィックスを用い、美しい力学の可視化とし、臨場感ある結果の表示を行えば、その特性をより鮮明に理解でき構造力学への興味も増進することになるかもしれません。

可視化のプログラムシステムの作成にあたっては、次のことに注意したいと思います。

1.教育的であること

ブラックボックスにならないように、プログラム中にコメントを多く入れ、実行状況はなるべく画面上で表示。処理上も会話的にすること。

2.数値実験的であること

構造や外力等物理定数はなるべく利用者が自由に設定・変更できること、また、2つ以上のモデルの比較によりパラメータの影響を短時間に調べられること。

3.画面入出力の有効利用

入出力は画面を主とし、入力のしやすさと画像による視覚的効果を有効に利用する。利用者は、入力から結果の表示や処理手順と状況把握を画面のみで行うことができる。この処理方式を会話型処理といい、利用者とマイコンの一体感を生み、利用者の解析への参加意識を持たせる意味もあります。

4. あとがき

以上、力学挙動の可視化を行うにあたっての基本的な事項を述べてきました。これからのプログラム作成にあたっては、ただ単に計算する機能だけでなく、前項で述べた可視化に着目した利用者の理解しやすいシステムが必要になると考えられます。

―引用・参考文献―

・三好俊郎 ： 有限要素法入門，培風館

・戸川隼人 ： マトリックスの数値計算，オーム社

マトリックス法とコンピュータ，培風館

・O.C.ツィエンキーヴィッツ ： マトリックス有限要素法，培風館