F.E.Mを用いた部材の応力解析について(1)

加納慎二

1. まえがき

最近、有限要素法（Finite Element Method）は急激な進歩・普及してきている。これには、電子計算機の出現によって、有限要素法に強力な計算手段が与えられたからである。有限要素法による構造物の解析は、最終的には電子計算機プログラムの作成とそのプログラムによる数値計算に帰着せざるをえない。

2. 有限要素法の原理

有限要素法は、解析しようとする構造物を、有限個の簡単な形状をした要素（部材）の集合体として考える。これに外力が作用すると構造物に変形を生じ、それにともなって、部材（すなわち有限要素）も変形するが、有限要素法では、有限要素（部材）上にいくつかの点（節点）を考え各有限要素の変形状態がこれらの点の変位（節点変位）によって定義されるものと仮定する。つまり、構造物の変形状態がこれらの節点の変位によって表わされるものと考えるのである。

また、部材（有限要素）には内力（力やモーメント）が作用しているが有限要素法ではこれらはすべての節点を通じてのみ伝達されるものと仮定する。そうすると有限要素に作用する力やモーメントで表わされることになる。つまり構造物内に作用している内力の状態が節点における力やモーメント（節点力）によって表わされると仮定することになる。また外力も節点を通じて構造物に与えられるものと仮定している。構造物内に考える節点の数は有限であり各節点での節点力や節点変位の数も有限であるから結局構

造物の変形状態や内力状態は、有限個の節点変位や節点力によって表わされることになる。

これらをふまえ、ある節点でその節点変位を定義すれば、それはその節点に集まるすべての要素について共通である。これを適合条件という。また、ある節点について内力の総和は、この節点に働く外力とつりあっているはずである。このことが平衡条件である。各要素の節点力と節点変位の関係を式化すると節点変位を未知数とする連立一次方程式となるから、この連立一次方程式を解いて節点変位が求められれば、それから各要素（部材）の変形状態が定まれるので要素の応力やひずみは簡単に計算することができる。これが有限要素法の原理である。つまり、各要素について節点力を節点変位で表わす1次式が求められれば、あとは適合条件と平衡条件を使って連立一次方程式を解けばよいので、有限要素法のキーポイントは、節点力をどのようにして節点変位の1次式として表現するかということになる。

3. 有限要素法と電子計算機

前述した連立1次方程式の元数は、解析する構造物の自由度の数に等しいから、簡単な構造でも数十元，少し複雑になればたちまち数百元から数千元となり、手計算でこの連立1次方程式を解くことは実際上不可能であるが、電子計算機を用いれば短時間で解を得ることができる。有限要素法が電子計算機の使用を前提としている大きな理由はこの点である。

4. 平板の解析方法

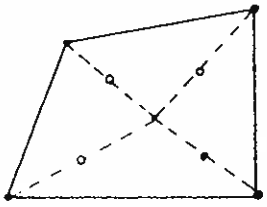
(1) モデル化と近似度

平面板を有限要素法によって応力解析する場合、解析結果が真の値に対して許容できる範囲内にあるように、

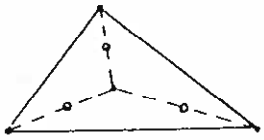
実際の構造物を要素に分割してモデル化する必要がある。モデル化と近似度の関係は個々の問題により異なるが、一般に構造物を細かく分割するほど近似度が高くなり真の値に近い解析結果が得られる。ただし、連立1次方程式の元数が大きくなるために、丸めによる計算誤差が累積することに注意する必要がある。

(2) 基本要素の分割

図-1のように、四角形要素は4個、三角形要素は3個の基本要素に分割する。頂点と重心は3自由度、頂点と重心を結ぶ辺の中点は1自由度とする。基本要素は完全3次の変位関数を仮定して剛性マトリックスを求める。要素の剛性マトリックスは、基本要素の剛性マトリックスから要素内部の自由度を消去して求める。



四角形要素



三角形要素

(・は3自由度, ○は1自由度)

図-1 基本要素の分割

(3) 曲げ理論の基礎式

平板の応力とひずみの関係は、以下の仮定に基づいている。

i) 板厚は他の寸法(長さ、幅)と比較して、きわめて小さいと仮定。

ii) 板のたわみは、板厚に比べてきわめて小さいと仮定。

iii) ひずみの平面保持の仮定に基づく。

以上の仮定に基づいて、等方性の応力とひずみの関係は次式で表わされる。

$$\{m\} = [D]\{\varepsilon\} - \{m_0\} \qquad ---(1)$$

ここに、

$$\{m\} = \{M_x \; M_y \; M_{xy}\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$[D] = D' \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$D' = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

w はz軸方向のたわみ、M_x、M_y、M_{xy} は単位幅あたりの曲げモーメントおよびねじりモーメント、Eはヤング係数、νはポアソン比、$\{\varepsilon_0\}$ は初期応力を表わす。

弾性定数について、$\nu \leq 0.5$ であることに注意する。

単位幅あたりの面外せん断力は次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \cdots (2)$$

M_x、M_y、M_{xy} は平面応力における σ_x、σ_y、τ_{xy} に相当する。

5. 計算例

以下に実際の計算例を示す。

設計条件

形　式　---　鉄筋コンクリート床版橋

橋　格　---　1等橋

橋　長　---　4,050 m

版　長　---　4,030 m

支　間　---　3,730 m

幅　員　---　7.500 ~ 1.500 m

活荷重　---　T-20

雪荷重　---　100 kg/m²

材　料

鉄筋コンクリート

設計基準強度　$\sigma_{ck} = 240^{kg/cm^2}$

許容曲げ圧縮応力度 $\sigma_{ca} = 80^{kg/cm^2}$

許容せん断応力度 $\tau_a = 3.9^{kg/cm^2}$

物理定数

弾性係数　$E = 2.7\times10^5$ kg/cm²

せん断弾性係数　$G = E_c/2.3$

形状寸法

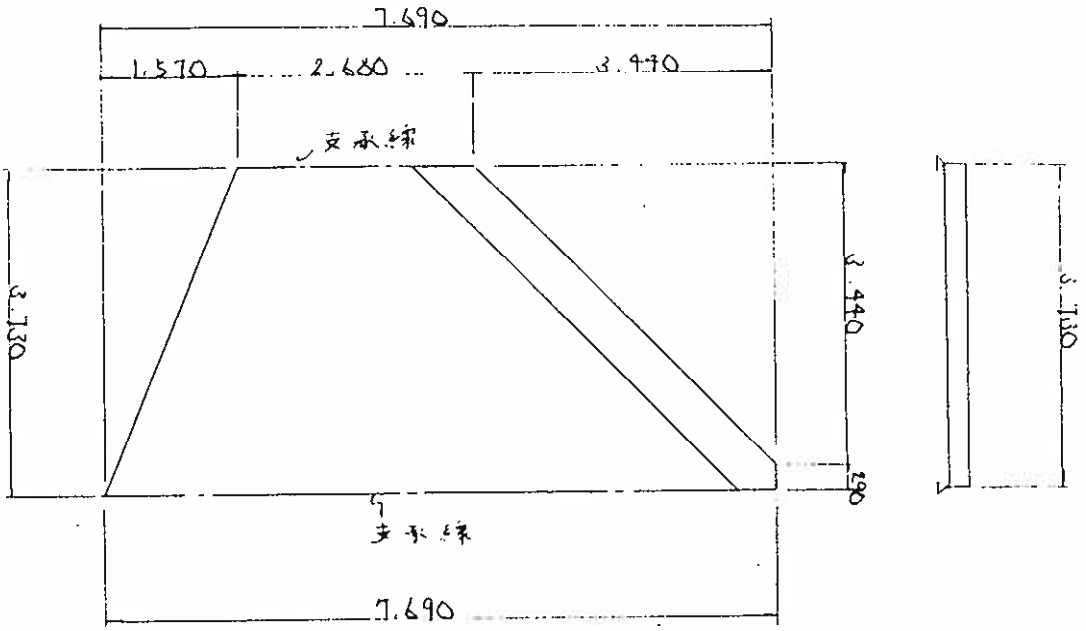


図-1. 形状寸法

節点、要素および荷重ケース

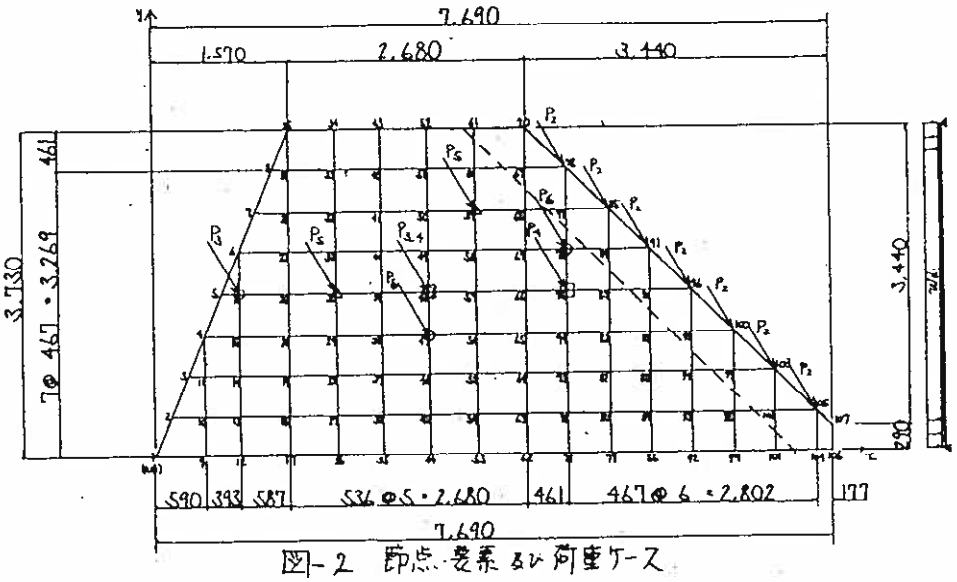


図-2 節点・要素および荷重ケース

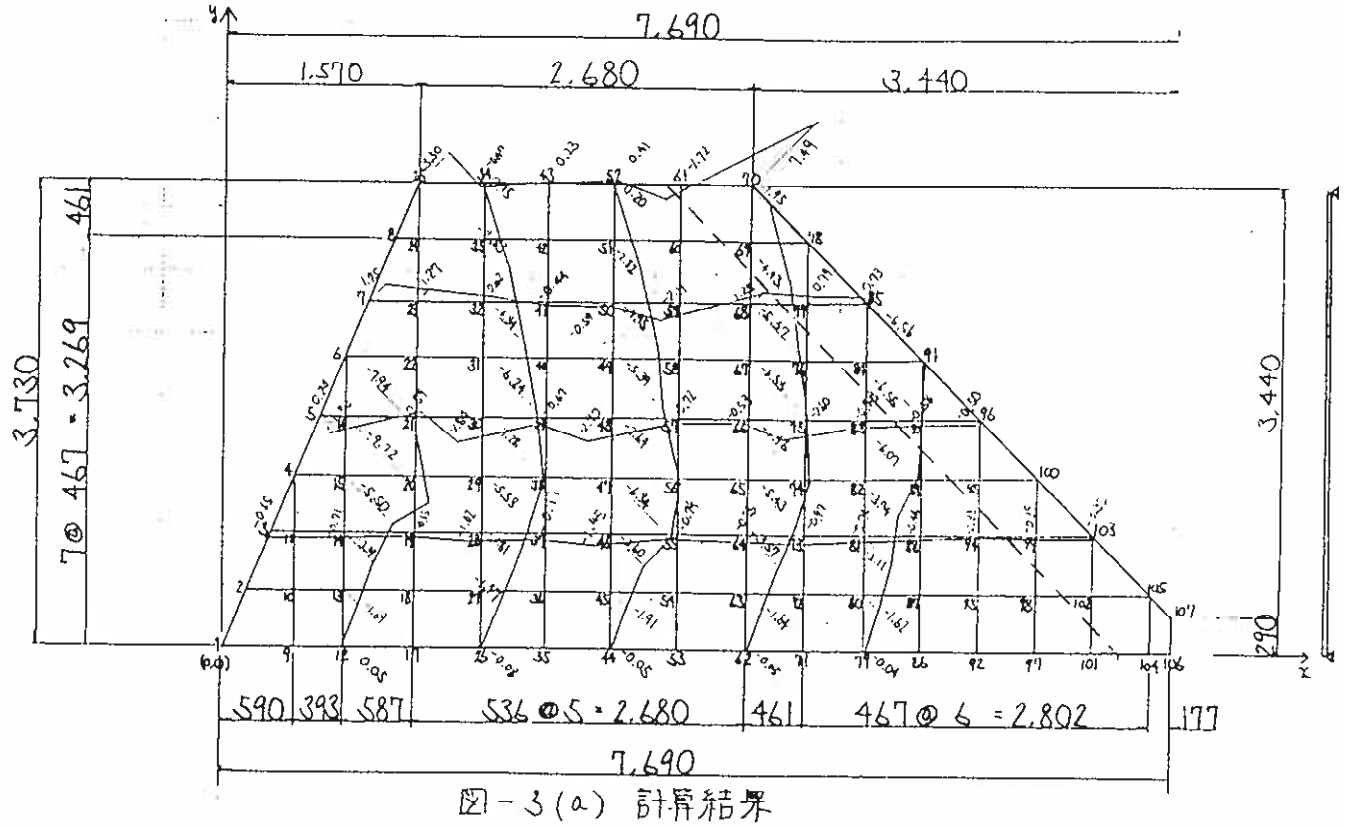
表-1 荷重ケース

荷重	記号	電算の荷重ケース	荷重強度	作用位置
床版+舗装+雪	W_{d1}	1	1.038 t/m²	全面
地覆+高欄	P_2	2	0.165 t/m	78, 85, 91, 96, 100, 103, 105
T荷重	P_3	3	10.98 t/m	16, 48
〃	P_4	4	〃	48, 75
〃	P_5	5	〃	30, 59
〃	P_6	6	〃	47, 76

表-2 荷重の組み合せ

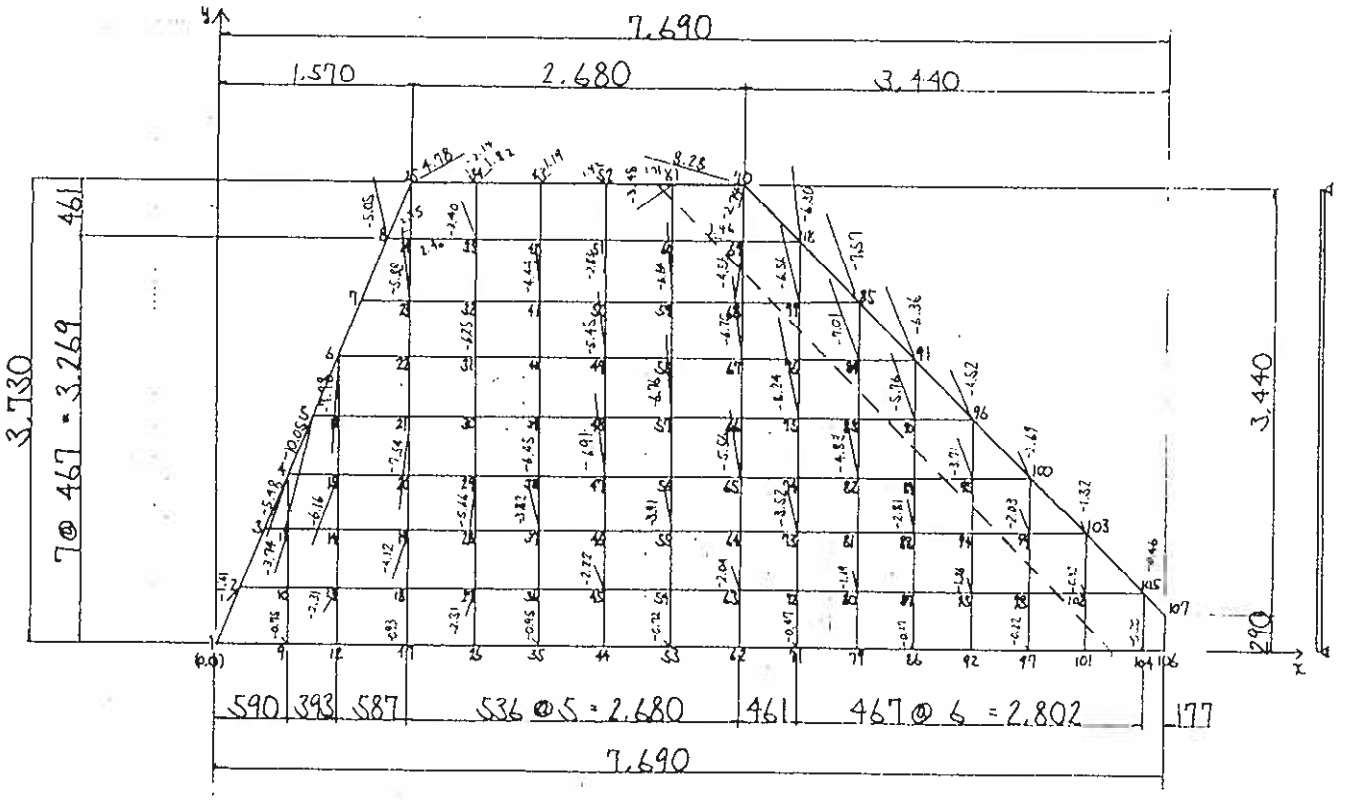
組み合せ	荷重ケース
CMB1	1+2+3
CMB2	1+2+4
CMB3	1+2+5
CMB4	1+2+6

Mmax 図　　x方向及びy方向に関するCMB1～CMB4の最大曲げモーメント



図－3(a) 計算結果

主曲げモーメント図　　CMB1～CMB4の最大曲げモーメント及びその方向



図－3(b) 計算結果

参考文献　三本木茂夫・吉村信敏：有限要素法による構造解析プログラム　培風館
FRAP－GEN説明書（骨組・平面板応力解析）　NTT